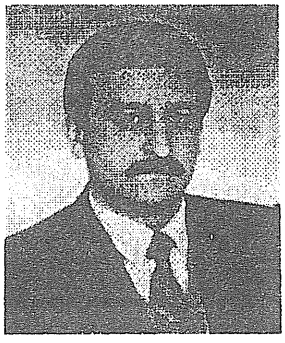
ISI BİLİMİ VE TEKNİĞİ DERGİSİ Cilt 14, Sayı 3, Eylül 1991 Sayfa : 10 – 14

BİLİM ve TEKNİĞE KATKILAR

SİLİNDİR ÇEVRESİNDE KATILAŞMA PROBLEMİNİN FARKLI SINIR KOŞULLARI İÇİN ÇÖZÜMÜ



Y.Doç.Dr. Zafer İLKEN
Dokuz Eylül Üniversitesi
Makina Mühendisliği Bölümü

1982 yılında ODTÜ Makina Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden, 1987 yılında Yüksek Lisans, 1990 yılında Doktora derecelerini aldı. Halen aynı Üniversitenin Makina Mühendisliği Bölümü'nde Yardımcı Doçent olarak çalışmaktadır. İlgi alanları, hal değişimli ısı geçişi ve enerji depolamasıdır.

SUMMARY

Determining the phase change rate is the most important part of the design in the processes involving solid-liquid phase change. In this study, the problem of solidification around a circular cylinder which is immersed in an infinite liquid medium is analysed. The location of the solid-liquid interface as a function of time is determined for the three different types of boundary conditions (namely for constant temperature, constant heat flux and constant convective heat transfer coefficient). The integral method of solution is used in the analysis.

ÖZET

Katı-sıvı hal değişimini içeren işlemlerde hal değişim hızının belirlenmesi tasarımın en önemli kısmını oluşturmaktadır. Bu konuda katkı sağlaması amacıyla, bu çalışmada, sonsuz bir sıvı ortam içerisinde bulunduğu varsayılan bir silindir çevresinde katılaşma problemi ele alınmakta ve farklı sınır koşulları (sabit sıcaklık, sabit ısı akısı ve sabit taşınım katsayısı) için, katı-sıvı ara yüzey konumunun zamana göre değişimi elde edilmektedir. Çözümlerde, sınır tabaka problemlerine de uygulanan integral yöntem kullanılmıştır.

GİRİŞ

Katı-sıvı hal değişimi, metalurjik işlemlerden buz imaline, gıdaların dondurulmasından enerjinin gizli ısı olarak depolanmasına kadar uzanan geniş bir alanda ortaya çıkan ve bir ısı geçiş problemi olarak birçok araştırmacının ilgisini çeken fiziksel bir olaydır.

Matematiksel olarak ele alındığında, hal değiştiren bölge sınırlarının hareketli olması, probleme lineer olmayan özellik kazandırmakta ve çözümü güçleştirmektedir. Katı ve sıvı bölgeler içerisindeki sıcaklık dağılımlarının yanısıra, bu bölgeleri birbirinden ayıran ara yüzeyin konumu da bir bilinmeyendir. Birbirlerine bağlı olan ve değerleri zamanla değişen bu bilinmeyenlerin ortaya çıkarılması, ait oldukları diferansiyel denklemlerin eşzamanlı olarak çözülmelerine bağlıdır.

Hareketli sınır problemleri olarak da adlandırılan hal değişim problemlerinin, sadece idealize edilmiş yarı sonsuz veya sonsuz ortamlar için tam analitik çözümleri mevcuttur [1]. Problem geometrisi veya sınır koşullar gereği tam çözümlerin elde edilemediği durumlar için ise; yaklaşık, yarı analitik ve sayısal çözüm yöntemleri geliştirilmiştir [2,3].

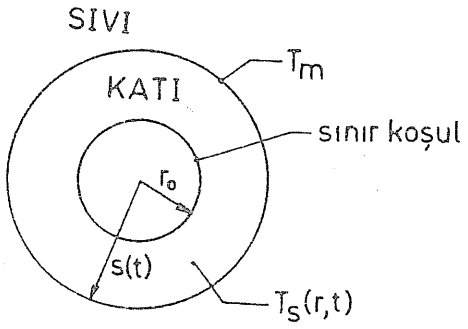
Silindir çevresinde katılaşma, birçok uygulamada karşılaşılan bir hal değişimi olayıdır. Örneğin, soğutma ve iklimlendirme sistemlerine integre edilen buzlu enerji depoları, içerisinden soğuk akışkan geçirilen borular

etrafında buz oluşturulması prensibi ile çalışır. Bu tür sistemlerin boyutlandırılmasında ise, katılaşma hızına ilişkin değerlere gereksinim vardır. Bunun gözardı edildiği tasarımlarda, sistem verimini düşüren çok önemli yanlışlar yapılabilir.

Bu çalışmada, bir silindir çevresinde katılaşma problemi ele alınmakta ve silindir iç yüzeyinde olabilecek üç farklı sınır koşul (sabit sıcaklık, sabit ısı akısı ve taşınım) için, katı-sıvı ara yüzey konumunun zamana göre değişimi bulunmaktadır. Çözümlerde, sınır tabaka problemlerine de uygulanan "İntegral Yöntem" kullanılmış, tasarım için gerekli güvenilirliğe sahip yaklaşık sonuçlar elde edilerek grafik formda sunulmuştur.

2. PROBLEM VE MATEMATİKSEL GÖSTERİMİ

Ele alınan problemde, başlangıçta hal değişim sıcaklığında (T_m) bulunan ve bir silindir çevresinde yer alan sıvı ortam, silindir yüzeyinde belli bir sınır koşulun oluşturulması sonucu katılaşmaya başlamakta ve oluşan katı bölge pozitif r yönünde ilerlemektedir (Şekil 1).



Şekil 1. Silindir çevresinde katılaşma.

Problemin formülasyonunda kullanılan kabuller şunlardır:

a) Katı ve sıvı hallere ait fiziksel özellikler işlem boyunca sabittir.

b) Silindir sonsuz uzunluktadır, silindir ekseni boyunca sıcaklık düşümü yoktur.

c) Sadece radyal doğrultuda ısı geçişi söz konusudur.

d) Silindir malzemesi çok ince ve ısıl iletkenliği çok yüksektir, dolayısıyla et kalınlığı boyunca sıcaklık değişimi ihmal edilebilir.

Bu kabuller doğrultusunda katı hal için geçerli ısı iletim denklemi,

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_s}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_s}\frac{\partial T_s}{\partial t}$$

$r_0 < r < s\,(t)$ aralığında, $t > 0$ için (1)

şeklini alır. Katı sınırları için geçerli eşitlikler ise, genel halde,

Katılaşmayı yaratan sınır koşul,

$r = r_0$ iken , $t > 0$ için (2)

$T_s = T_m$, $r = s(t)$ iken, $t > 0$ için (3)

olarak yazılabilir.

Enerji dengesi gereğince, katı boyunca çekilen ısının katılaşan bölgede depolanan gizli ısıya eşit olması gerektiğinden, katı-sıvı ara yüzeyi için,

$$k_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial r} = \rho L \frac{ds(t)}{dt}$$

$r = s(t)$ iken, $t > 0$ için (4)

bağıntısı yazılır. Problemin başlangıç koşulu ise,

$s(t) = r_0$, $t = 0$ için (5)

şeklinde ifade edilebilir.

Boyutsuz parametrelerin kullanımıyla, problemi tanımlayan eşitlikleri boyutsuz olarak yazmak mümkündür. Buna göre (1-5) denklemi sırasıyla,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r_f^2} + \frac{1}{r_f}\frac{\partial u}{\partial r_f} = \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$1 < r_f < s_f$ aralığında, $\tau > 0$ için (6)

Katılaşmayı yaratan sınır koşulun boyutsuz ifadesi

$r_f = 1$ iken, $\tau > 0$ için (7)

$u = 1$, $r_f = s_f$ iken, $\tau > 0$ için (8)

$$\frac{\partial u}{\partial r_f} = \frac{1}{Ste}\frac{ds_f}{\partial \tau} \quad , r_f = s_f \text{ iken } \tau > 0 \text{ için} \qquad (9)$$

$$s_f = 1 \quad , \tau = 0 \qquad (10)$$

halini alır.

3. İNTEGRAL YÖNTEMİ VE FARKLI SINIR KOŞULLARI İÇİN ÇÖZÜMLER

Akışkanlar dinamiğinde, hidrodinamik sınır tabaka kalınlığını bulmaya yönelik yöntemlerden birisi, momentum denkleminin sınır tabaka boyunca integrasyonu ile elde edilen bağıntının, seçilen bir hız profiline göre çözümünü içeren "İntegral Yöntemi"dir. Aynı yöntem, bir katılaşma probleminde katı hal içerisindeki sıcaklık dağılımının, sınır tabakadaki hız dağılımına benzediği varsayımından yola çıkan Goodmann [4] tarafından hal değişim problemlerine uygulanmış ve daha sonra birçok kişi tarafından da kullanılmıştır [5–9].

Ele alınan problem için integral yönteminin kullanımı, katılaşmayı yaratan farklı sınır koşullarına göre aşağıda gösterilmiştir.

3.1. Birinci çeşit sınır koşul (Silindir yüzeyinde sabit sıcaklık olması durumu)

Silindir yüzeyinin, t = 0 anında T_0 gibi hal değişim değerinden düşük bir sıcaklığa getirilmesi ve bu değerde sabit tutulması halinde sınır koşulun matematiksel gösterimi,

$$u = 0 \quad , r_f = 1 \text{ iken, } \tau > 0 \text{ için} \qquad (7.a)$$

olur.

İntegral yönteminin kullanımı için uygun bir sıcaklık profili seçmek gerekir. Lardner ve Pohle [5], silindirik katılaşma problemlerinde en uygun olanın logaritmik sıcaklık dağılımı olduğunu göstermişlerdir. Buradan hareketle, (7.a) ve (8) denklemlerini sağlayan

$$u = \frac{\ln r_f}{\ln s_f} \qquad (11)$$

şeklinde bir sıcaklık profili seçilebilir.

(6) denklemi (1, s_f) aralığıda integral edilirse,

$$\int_1^{s_f} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r_f^2} + \frac{1}{r_f}\frac{\partial u}{\partial r_f}\right] dr_f = \int_1^{s_f} \frac{\partial u}{\partial \tau}\, dr_f \qquad (12)$$

seçilen sıcaklık profiline göre (6) denklemini oluşturan terimlerin integrallerinin aşağıdaki değerleri eşit olduğu gösterilebilir.

$$\int_1^{s_f} \frac{\partial^2 u}{\partial r_f^2}\, dr_f = \frac{1}{Ste}\frac{ds_f}{d\tau} - \frac{1}{\ln s_f} \qquad (13)$$

$$\int_1^{s_f} \frac{1}{r_f}\frac{\partial u}{\partial r_f}\, dr_f = \frac{s_f - 1}{s_f \ln s_f} \qquad (14)$$

$$\int_1^{s_f} \frac{\partial u}{\partial \tau}\, dr_f = \left[\frac{s_f - s_f \ln s_f - 1}{s_f \ln^2 s_f}\right]\frac{sf_1}{\partial \tau} \qquad (15)$$

(13), (14) ve (15) eşitlikleri (12) denkleminde yerlerine konulursa, sadece ara yüzey konumunun bağımlı değişken olarak yer aldığı

$$\frac{ds_f}{d\tau} = \frac{\ln\left(\frac{1}{s_f}\right)}{\left[s_f\left(1 - \ln s_f - \frac{\ln^2 s_f}{Ste}\right) - 1\right]} \qquad (16)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemi sayısal bir yöntemle çözmek mümkündür. Ancak başlangıç anında $s_f = 1$ olduğundan, (16) denklemi bu noktada tekildir. Bu nedenle denklemin çözümüne $\tau = 0$ anından değil τ_1 gibi çok küçük bir sonraki andan başlanabilir. Bu ana karşılık gelen s_f değeri ise küçük zaman seri çözümünden elde edilebilir [10]. Buna göre,

$$s_f\big|_{\tau=\tau_1} = 1 + e_0 \tau_1^{1/2} + e_1 \tau_1 + e_2 \tau_1^{3/2} + \ldots \qquad (17)$$

olup,

$$e_0 \cong \sqrt{\frac{2}{(1/Ste + 0.5)}} \qquad (17.a)$$

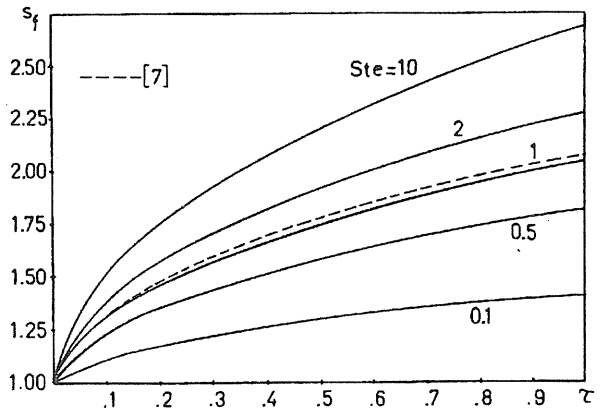
$$e_1 \cong e_0 / \sqrt{3} \qquad (17.b)$$

$$e_2 \cong \frac{e_1 + e_0^2/2 - (1/Ste + 0.5)\, e_1^2}{2\,(1/Ste + 0.5)\, e_0} \qquad (17.c)$$

şeklindedir.

(17) eşitliğinden $\tau = 0.001$ için bulunan s_f değerinin başlangıç değer olarak kullanıldığı çözümler Şekil 2'de yer almaktadır. Aynı şekil üzerinde Ste = 1 için farklı bir

çalışmanın [7] sonucu da verilmiştir.



Şekil 2. Sabit yüzey sıcaklığı sınır koşulu altında ara yüzey konumunun zamana göre değişimi

3.2. İkinci çeşit sınır koşul (Silindir yüzeyinde sabit ısı akısı olması durumu)

t = 0 anından itibaren silindir yüzeyinden q sabit akısı ile ısı çekilmesi sonucu katılaşmanın oluşacağı düşünülürse, sınır koşul

$$\frac{\partial u}{\partial r_f} = q_f \qquad , r_f = 1 \text{ iken, } \tau > 0 \text{ için} \qquad (7.b)$$

olarak ifade edilir. (7.b) ve (8) denklemlerini sağlayan logaritmik sıcaklık profili ise

$$u = 1 + q_f \ln (r_f / s_f) \qquad (18)$$

şeklinde seçilebilir.

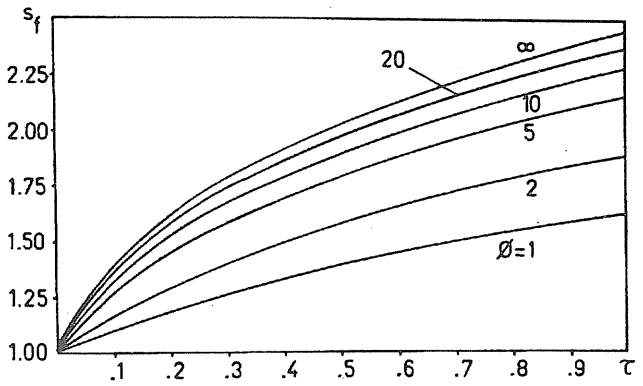
(6) denkleminin (1, s_f) aralığında integrasyonu sonucu

$$\frac{ds_f}{d\tau} = \frac{q_f Ste}{s_f + q_f Ste\,(s_f - 1)} \qquad (19)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Değişkenlerine ayrılabilir türde olan ve tekillik göstermeyen bu denklemin çözümü

$$s_f = \frac{\phi + \sqrt{2\,\phi\,\tau\,(1+\phi) + 1}}{1 + \phi} \qquad (20)$$

şeklindedir. Farklı ϕ değerleri için elde edilen sonuçlar Şekil 3'de yer almaktadır (İkinci çeşit sınır koşul için yapılan formülasyonda $u = T_s / T_m$, $Ste = C_{ps}\,T_m/L$ olarak tanımlanmıştır).



Şekil 3. Sabit ısı akısı sınır koşulu altında ara yüzey konumunun zamana göre değişimi

3.3. Üçüncü çeşit sınır koşul (Silindir içinden taşınımla ısı geçişi olması durumu)

t = 0 anından itibaren silindir için T_0 sıcaklığıda ($T_0 < T_m$) ve yüzey ile arasındaki taşınım katsayısı h olacak şekilde bir soğutkanın geçmesi sonucu katılaşmanın gerçekleşeceği durum için sınır koşul

$$\frac{\partial u}{\partial r_f} = Bi \,.\, u \qquad , r_f = 1 \text{ iken, } \tau > 0 \text{ için} \qquad (7.c)$$

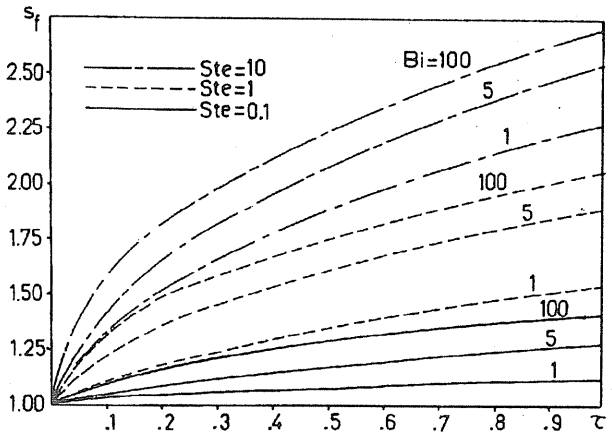
olarak yazılabilir. (7.c) ve (8) denklemlerinisağlayan uygun sıcaklık profili ile, (6) denkleminin integrasyonu sonucu elde edilen diferansiyel denklem, sırasıyla

$$u = \frac{1 + Bi \ln r_f}{1 + Bi \ln s_f} \qquad (21)$$

$$\left[\frac{Bi\,(s_f + Bi\,s_f \ln s_f - Bi\,s_f - 1 + Bi)}{s_f (1 + Bi \ln s_f)^2} + \frac{1}{Ste}\right] x$$

$$\frac{ds_f}{d\tau} = \frac{Bi}{s_f (1 + Bi \ln s_f)} \qquad (22)$$

şeklindedir. (22) denkleminin farklı Stefan ve Biotsayıları için 4. derece Runge-Kutta yöntemiyle çözümünden elde edilen sonuçlar, Şekil 4'de yer almaktadır.



Şekil 4. Taşınım sınır koşulu altında ara yüzey konumununzamana göre değişimi

4. DEĞERLENDİRME

Katılaşma içeren herhangi bir işlemde, belirli bir hal değişim miktarına ulaşabilmek için gerekli süre veya belirli bir sürede ulaşılabilecek miktar, bilinmesi gerekli olan, sistem tasarımının en önemli kısmını oluşturmaktadır. Bu çerçevede değerlendirildiğinde, bir silindir çevresinde katılaşmaya ilişkin elde edilen ve yukarıda sunulan sonuçlar, uygun sınır koşulunun belirlenmesiyle, sistemin boyutlarına ait limitlerin saptanmasında güvenle kullanılabilirler.

GÖSTERİMLER

Bi	hr_0/k_s
c_{ps}	Katının özgül ısısı, kJ/kg°C
h	İç taşınım katsayısı, W/m^2 °C
k_s	Katının ısı iletim katsayısı, W/m°C
L	Hal değişim gizli ısısı, kJ/kg
q	Isı akısı, W/m^2
q_f	$q\ r_0/(k_s T_m)$
r	Radyal koordinat
r_f	r/r_0
r_0	Silindir yarıçapı, m
s(t)	Ara yüzey konumu, m
s_f	$s(t)/r_0$
Ste	Stefan sayısı, $c_{ps}\ (T_m - T_0)/L$
t	Zaman, s
T_m	Hal değişim sıcaklığı, °C
T_0	Silindir yüzey/soğutkan sıcaklığı, °C
T_s	Katı hal sıcaklığı, °C
u	$(T_s - T_0)/(T_m - T_0)$
α_s	Katının ısı yayınım katsayısı, m^2/s
ϕ	q_f . Ste
ρ	Katının yoğunluğu, kg/m^3
τ	$\alpha_s\ t/r_0^2$

KAYNAKÇA :

[1] Özışık, M.N., *"Heat Conduction"*, J. Wiley and Sons Co., 1980.

[2] İlkin, Z., Toksoy, M., "Faz Değişimli Isı Transferi Problemlerinde Kullanılan Çözüm Yöntemleri", DEÜ, FBE/MAK–89 AR–131, 1989.

[3] Fukusako, S., Seki, N., "Fundamental Aspects of Analytical and Numerical Methods on Freezing and Melting Heat Transfer Problems", Annual Rewiev of Numerical Fluid Mechanics and Heat Transfer, Vol. 1, Ch. 7, 1986.

[4] Goodman, T.R., "The Heat Balance Integral and Its Application to Problems Involving a Change of Phase", Trans. ASME, 335-342, 1958.

[5] Lardner, T.J., Pohle, F.V., "Application of The Heat Balance Integral to Problems of Cylindrical Geometry", J. App. Mech., 310-312, 1961.

[6] Poots, G., "On the Application of Integral Methods to the Solution of Problems Involving the Solidification of Liquids Initially at Fusion Temperature". Int. J. Heat Mass Tr., Vol. 5, 525-531, 1962.

[7] Bell, G.E., "Solidification of a Liquid About a Cylindrical Pipe", Int. J. Heat Mass Tr., Vol. 22, 1681–1686, 1979.

[8] Lunardini, V.J., "Phase Change around a Circular Cylinder", J. Heat Tr., Vol. 103, 598-600, 1981.

[9] Garguichevich, G.G., "A Note on the Heat Balance Integral Method Applied to the Resolution of a One-Phase Stefan Problem with an Increasing Prescribed Flux on the Fixed Face", Int. Comm. Heat Mass Tr., Vol. 10, 349-355, 1983.

[10] Toksoy, M., İlken, Z., "Dönen Bir Silindir Üzerinde Faz Değişimi, "DEÜ, FBE/MAK-89 AR-132, 1989.